第５講　三角関数の公式の導き方

5　次の公式を導け.

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(3)　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

(4)　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　三角関数の公式の導き方

5　$\cos\theta = x$ とするとき，次の各式を x の整式として表せ.

(1)　$\cos 4\theta$

(2)　$\cos 5\theta$

(3)　$\cos 6\theta$

(4)　$\cos 9\theta$

【選択肢】

(1)　㋐　$8x^4 - 8x^2 + 1$　㋑　$8x^4 + 8x^2 + 1$　㋒　$8x^4 - 8x^2 - 1$

(2)　㋐　$16x^5 - 20x^3 - 5x$　㋑　$16x^5 - 20x^3 + 5x$　㋒　$16x^5 + 20x^3 + 5x$

(3)　㋐　$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$　㋑　$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 + 1$

㋒　$32x^6 - 48x^4 - 18x^2 - 1$

(4)　㋐　$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 - 9x$

㋑　$256x^9 - 576x^7 - 432x^5 - 120x^3 + 9x$

㋒　$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　三角関数の公式の導き方

5　次の公式を導け.

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(3)　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

(4)　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

【答】　略

【解答】

(1)　座標平面上の点を $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{Q}(\sin\beta,\ \cos\beta)$，$\mathrm{P}'(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$，$\mathrm{Q}'(0,\ 1)$ とすると，P' と Q' は，それぞれ P と Q を原点を中心に β だけ回転移動した点であるので $\mathrm{PQ}^2=\mathrm{P'Q'}^2$　よって

$$(\sin\beta-\cos\alpha)^2+(\cos\beta-\sin\alpha)^2=\{0-\cos(\alpha+\beta)\}^2+\{1-\sin(\alpha+\beta)\}^2$$

$$2-2\sin\alpha\cos\beta-2\cos\alpha\sin\beta=2-2\sin(\alpha+\beta)$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

(2)　(1)の結果 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ において，α に $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，β に $-\beta$ を代入すると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

よって

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

(3)　加法定理 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ において $\alpha=\beta=\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\cos 2\theta&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=1-2\sin^2\theta\end{aligned}$$

を得る．よって，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　加法定理より，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　と　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

の辺々の差をとると

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

ここで $\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$ となるので

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を導くことができる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　三角関数の公式の導き方

5　$\cos\theta = x$ とするとき，次の各式を x の整式として表せ.

(1)　$\cos 4\theta$

(2)　$\cos 5\theta$

(3)　$\cos 6\theta$

(4)　$\cos 9\theta$

【選択肢】

(1)　㋐　$8x^4-8x^2+1$　㋑　$8x^4+8x^2+1$　㋒　$8x^4-8x^2-1$

(2)　㋐　$16x^5-20x^3-5x$　㋑　$16x^5-20x^3+5x$　㋒　$16x^5+20x^3+5x$

(3)　㋐　$32x^6-48x^4+18x^2-1$　㋑　$32x^6-48x^4+18x^2+1$

㋒　$32x^6-48x^4-18x^2-1$

(4)　㋐　$256x^9-576x^7+432x^5-120x^3-9x$

㋑　$256x^9-576x^7-432x^5-120x^3+9x$

㋒　$256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑　(3) ㋐　(4) ㋒

【解答】

(1)　$\cos 4\theta = \cos 2(2\theta) = 2\cos^2 2\theta - 1$

$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1$

$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

$= \mathbf{8x^4 - 8x^2 + 1}$

(2)　$\cos 5\theta = \cos(4\theta + \theta) = \cos 4\theta\cos\theta - \sin 4\theta\sin\theta$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1)\cos\theta - 2\sin 2\theta\cos 2\theta\sin\theta$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1)\cos\theta - 2(2\sin\theta\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1)\sin\theta$

$= (8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1)\cos\theta - 4(1 - \cos^2\theta)(2\cos^2\theta - 1)\cos\theta$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

$= \mathbf{16x^5 - 20x^3 + 5x}$

(3)　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より

$\cos 6\theta = \cos 2(3\theta) = 2\cos^2 3\theta - 1$

$= 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)^2 - 1$

$= 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$

$= \mathbf{32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1}$

(4)　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より

$\cos 9\theta = \cos 3(3\theta) = 4\cos^3 3\theta - 3\cos 3\theta$

$= 4(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)^3 - 3(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= 256\cos^9\theta - 576\cos^7\theta + 432\cos^5\theta - 120\cos^3\theta + 9\cos\theta$

$= \mathbf{256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。